

METODA BEDA HINGGA PADA PERSAMAAN KdV GELOMBANG INTERFACE

L.H. Wiryanto dan Warsoma Djohan
Departemen Matematika, Institut Teknologi Bandung
Jalan Ganesha 10 Bandung

Abstract. Propagation of interfacial wave, modeled in an equation of KdV type, is solved numerically. A finite different method is used to construct a system of linear equations from the model, and the system is solved by Gauss-Seidel method. This numerical procedure is firstly tested for solitary wave, which gives agreement to the analytical solution, and is then used to observe a simulation of wave propagation generated on the left by a generator, for some various values of parameters, depth and fluid density.

Keywords: finite different method, KdV equation, interfacial wave.

1. PENDAHULUAN

Makalah ini membahas perambatan gelombang interface yang terjadi pada pertemuan antara dua fluida yang masing-masing, fluida atas dan fluida bawah secara berturutan, mempunyai rapat massa konstan ρ_1 dan ρ_2 . Gelombang tersebut secara fisis dinyatakan sebagai simpangan pada interface $\eta(x,t)$, yang dalam keadaan tak terganggu berbentuk datar.

Salah satu model hampiran untuk perambatan gelombang internal adalah persamaan yang bertipe KdV. Penurunan telah banyak dilakukan untuk berbagai kondisi dan pendekatan; seperti aliran steady [10], pycnocline yang tipis [9], peninjauan khusus gelombang merambat (traveling waves) [8], dan fluida dua lapis dengan batas atas bebas [7]. Hasil studi tentang persamaan KdV untuk gelombang internal yang relative baru dapat dibaca diantaranya [1, 4, 6]. Khusus peninjauan gelombang pada interface dari sistem dua fluida yang memenuhi sistem Hamilton, telah dilakukan [5]. Perambatan gelombang oleh kebanyakan peneliti di atas diamati secara analitik melalui solusi persamaan KdV yang berupa gelombang soliter. Hal ini memungkinkan mengamati perambatan gelombang yang bertipe lain, selain soliter. Untuk itu, penyelesaian persamaan KdV secara nu-

merik merupakan salah satu alternative yang dapat dilakukan.

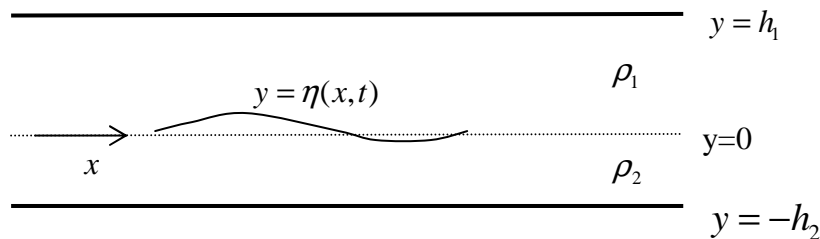
Pada makalah ini persamaan KdV untuk gelombang interface diselesaikan secara numerik dengan menggunakan persamaan beda hingga. Kesulitan muncul dalam menangani suku tak linear dan suku yang memuat turunan ketiga, sehingga metoda beda hingga jarang digunakan pada persamaan KdV. Oleh karena itu, pengembangan prosedur numerik menggunakan beda hingga menjadi tantangan dan motivasi dalam tulisan ini. Untuk mengatasinya digunakan metoda beda hingga implisit yang dilinearkan seperti yang disarankan oleh [3]. Prosedur numerik yang dibangun di sini awalnya diuji untuk gelombang berbentuk secan-hiperbolik, dan menunjukkan kesesuiannya dengan solusi analitik. Selanjutnya metoda tersebut digunakan untuk mengamati perambatan gelombang dengan pembangkit berada di sebelah kiri. Pengaruh parameter terkait, kedalaman fluida dan rapat massa, juga diamati pada perambatan tersebut.

Dalam penyampaianannya, makalah ini dibagi menjadi beberapa pokok bahasan untuk mempermudah mengikuti alur pembahasan. Pada pokok bahasan 2 uraian singkat tentang persamaan KdV diberikan, yang berkaitan dengan fisis yang dimaksud. Kemudian pada pokok bahasan berikutnya dijelaskan prosedur numerik untuk

persamaan KdV terkait, dan hasil-hasil pengamatan dari perhitungan numerik dibahas pada pokok bahasan 4.

2. PERSAMAAN KDV GELOMBANG INTERFACE

Makalah ini membahas gelombang internal yang terjadi pada pertemuan antara dua fluida dua dimensi dengan rapat massa masing-masing fluida konstan ρ_1 dan ρ_2 dan ketebalan h_1 dan h_2 , selanjutnya disebut gelombang interface. Selain itu sistem dua fluida ini dibatasi di atas dan di bawah oleh plat datar. Dengan menetapkan interface tak terganggu sebagai sumbu datar, maka gelombang yang dimaksud merupakan simpangan pada interface $\eta(x,t)$ seperti diilustrasikan pada Gambar 1.



Gambar 1. Sketsa gelombang interface

Dengan meninjau fluida bersifat tak termampatkan dan tak kental, dan partikel fluida bergerak secara irrotational, persamaan dasar dari sistem fluida tersebut dapat dinyatakan sebagai fungsi potensial ϕ_1 dan ϕ_2 yang memenuhi persamaan Laplace, dan kondisi batas solid $\phi_{1y}(x, h_1, t) = 0$, $\phi_{2y}(x, h_2, t) = 0$ (2.1) dan kondisi di interface

$$\begin{aligned} \eta_t + \phi_{1x}\eta_x &= \phi_{1y}, \quad \eta_t + \phi_{2x}\eta_x = \phi_{2y}, \\ \rho_1 \left(\phi_{1t} + \frac{1}{2} |\nabla \phi_1|^2 + g\eta \right) &= \\ \rho_2 \left(\phi_{2t} + \frac{1}{2} |\nabla \phi_2|^2 + g\eta \right) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Di sini digunakan notasi dengan indeks 1 menyatakan besaran fluida yang berada di lapisan atas, dan indeks 2 untuk fluida di lapisan bawah.

Untuk mengatasi masalah di atas, metoda ekspansi asimtotik diterapkan, seperti banyak dilakukan oleh para peneliti, diantaranya [11]. Lebih dahulu, gelombang diasumsikan mempunyai karakteristik panjang-gelombang yang panjang dan amplitudo yang kecil, relative terhadap kedalaman total $h_1 + h_2$, sehingga peninjauan dapat dilakukan dalam variable tak berdimensi dan memampatkan variable fisik x dan waktu t . Selanjutnya, fungsi potensial dan simpangan pada interface dimisalkan dalam bentuk deret terhadap parameter amplitudo. Peninjauan order demi order pada kondisi batas menghasilkan persamaan dari simpangan bertipe KdV. Dalam variable berdimensi persamaan tersebut berbentuk

$$\eta_t + c \eta_x + \mu \eta \eta_x + \delta \eta_{xxx} = 0, \quad (2.3)$$

dengan

$$\begin{aligned} c^2 &= \frac{g(\rho_2 - \rho_1)h_1h_2}{\rho_1h_2 + \rho_2h_1}, \\ \mu &= \frac{3c(\rho_2h_1^2 - \rho_1h_2^2)}{2h_1h_2(\rho_1h_2 + \rho_2h_1)}, \\ \delta &= \frac{ch_1h_2(\rho_1h_1 + \rho_2h_2)}{6(\rho_1h_2 + \rho_2h_1)}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Untuk dapat mengamati perambatan gelombang melalui Persamaan (2.3) secara numerik, ukuran variable x , t dan η harus disesuaikan lebih dahulu, sehingga tiap suku mempunyai orde yang sama. Salah satunya dengan menyatakan

$$\xi = \sqrt{a_m} x, \quad y = \frac{\eta}{a_m}, \quad \tau = a_m t, \quad (2.5)$$

dimana a_m merupakan ukuran satuan dari amplitudo. Persamaan (2.3) menjadi

$$y_\tau + \frac{c}{a_m} y_\xi + \frac{\mu}{2} (y^2)_\xi + \delta y_{\xi\xi\xi} = 0. \quad (2.6)$$

Secara analitis Persamaan (2.6) mempunyai solusi gelombang solitar berbentuk

$$y(\xi, \tau) = a \operatorname{sech}^2 \left[\frac{1}{2} \sqrt{2a} \left\{ \sqrt{\frac{\mu}{6\delta}} \xi - \left(\frac{c}{a_m^{3/2}} + \frac{\mu}{18} \sqrt{\frac{\mu}{\delta}} \right) \tau \right\} \right]. \quad (2.7)$$

dengan a konstanta sebarang, atau dapat dinyatakan dalam variabel semula sebagai solusi (2.3).

3. PROSEDUR NUMERIK

Pada bagian ini diuraikan prosedur menyelesaikan persamaan (2.6) menggunakan metoda beda hingga ForwardTime Central-Space. Pemilihan cara diskritisasi tersebut belum cukup untuk menyelesaikan persamaan (2.6). Kestabilan merupakan salah satu masalah yang harus dihadapi. Hal ini dapat diatasi dengan membentuk persamaan beda implisit. Untuk mendapatkannya, nilai turunan terhadap ξ dihampirkan menggunakan rata-rata dua tingkat.

Adanya turunan ketiga pada persamaan (2.6) juga merupakan kesulitan yang harus diatasi. Dari hasil perhitungan teramati bahwa matrik yang terbentuk dari persamaan implisit mempunyai elemen diagonal yang sangat kecil dibandingkan elemen lainnya, sehingga kekonvergenan iterasi tidak tercapai. Untuk mengatasinya, persamaan (2.6) diturunkan terhadap ξ , menjadi

$$y_{\tau\xi} + \frac{c}{a_m} y_{\xi\xi} + \frac{\mu}{2} (y^2)_{\xi\xi} + \delta y_{\xi\xi\xi\xi} = 0. \quad (3.1)$$

Sampai di sini pendiskritan persamaan dapat dilakukan dengan menggunakan hampiran

$$y_{\tau\xi} \approx \frac{1}{\Delta\tau} \left[\frac{y_{i+1}^{j+1} - y_{i-1}^{j+1}}{2\Delta\xi} - \frac{y_{i+1}^j - y_{i-1}^j}{2\Delta\xi} \right] \quad (3.2)$$

$$y_{\xi\xi} \approx \frac{1}{2} \left[\frac{y_{i+1}^{j+1} - 2y_i^{j+1} + y_{i-1}^{j+1} + y_{i+1}^j - 2y_i^j + y_{i-1}^j}{\Delta\xi^2} \right] \quad (3.3)$$

$$y_{\xi\xi\xi\xi} \approx \frac{1}{2\Delta\xi^4} [y_{i-2}^{j+1} - 4y_{i-1}^{j+1} + 6y_i^{j+1} - 4y_{i+1}^{j+1} + y_{i+2}^{j+1} + y_{i-2}^j - 4y_{i-1}^j + 6y_i^j - 4y_{i+1}^j + y_{i+2}^j] \quad (3.4)$$

dimana $\Delta\xi$ dan $\Delta\tau$ merupakan lebar selang diskritisasi space dan waktu. Sedangkan variabel yang ada pada (3.1) dinyatakan sebagai $\xi = i\Delta\xi$, $\tau = j\Delta\tau$ dan $y(\xi, \tau) = y_i^j$ untuk i, j berupa bilangan bulat.

Untuk suku tak linear, pendiskritan dilakukan dengan menuliskan $f = y^2$ dan turunannya dihampirkan menggunakan

$$f_{\xi\xi} \approx \frac{1}{2} \left[\frac{f_{i+1}^{j+1} - 2f_i^{j+1} + f_{i-1}^{j+1} + f_{i+1}^j - 2f_i^j + f_{i-1}^j}{\Delta\xi^2} \right] \quad (3.5)$$

Dengan menggunakan uraian $f_i^{j+1} \approx f_i^j + f_y y_\tau|_i^j \Delta\tau$, hubungan nilai rata-rata f dua tingkat dengan y diperoleh dalam bentuk $\frac{1}{2} [f_i^{j+1} + f_i^j] \approx y_i^j y_i^{j+1}$.

Oleh karenanya, (3.5) menjadi

$$f_{\xi\xi} \approx \left[\frac{y_{i+1}^j y_{i+1}^{j+1} - 2y_i^j y_i^{j+1} + y_{i-1}^j y_{i-1}^{j+1}}{\Delta\xi^2} \right] \quad (3.6),$$

sebagai linearisasi dari suku ketiga pada (3.1).

Nilai hampiran (3.2) dan (3.3) selanjutnya digunakan untuk menggantikan suku-suku (3.1), untuk mendapatkan persamaan beda. Dengan menggunakan operasi aljabar persamaan tersebut dapat dituliskan dalam bentuk

$$a_2 y_{i+2}^{j+1} + a_1 y_{i+1}^{j+1} + a_0 y_i^{j+1} + b_1 y_{i-1}^{j+1} + b_2 y_{i-2}^{j+1} = d, \quad (3.7)$$

dengan

$$a_2 = \frac{\Delta\tau}{\Delta\xi} \delta, \quad a_1 = 1 + \frac{\Delta\tau}{\Delta\xi} \left(\frac{c}{a_m} + \mu y_{i+1}^j \right) - \frac{4\Delta\tau}{\Delta\xi^3} \delta,$$

$$a_0 = -2 \frac{\Delta\tau}{\Delta\xi} \left(\frac{c}{a_m} + \mu y_{i-1}^j \right) + 6\delta \frac{\Delta\tau}{\Delta\xi^3},$$

$$b_1 = -1 + \frac{\Delta\tau}{\Delta\xi} \left(\frac{c}{a_m} + \mu y_{i-1}^j \right) - 4\delta \frac{\Delta\tau}{\Delta\xi^3},$$

$$b_2 = \delta \frac{\Delta\tau}{\Delta\xi^3},$$

$$d = y_{i-1}^j - y_{i+1}^j + \frac{c}{a_m} \frac{\Delta\tau}{\Delta\xi} (y_{i+1}^j - 2y_i^j + y_{i-1}^j) + \delta \frac{\Delta\tau}{\Delta\xi^3} (y_{i+2}^j - 4y_{i+1}^j + 6y_i^j - 4y_{i-1}^j + y_{i-2}^j).$$

Nilai y pada tingkat $j+1$ dihitung secara bersama untuk $i = 0, 1, 2, \dots, N$ menggunakan nilai y pada tingkat sebelumnya. Setiap i dari (3.7) menghasilkan satu persamaan linear dengan 5 *unknowns*, sehingga keseluruhannya terdapat $N+1$ persamaan dengan $N+5$ *unknowns*. Untuk mendapatkan bentuk tertutup diperlukan 4 persamaan tambahan. Hal ini diatasi dengan memberikan nilai y_{-2}^{j+1} dan y_{-1}^{j+1} untuk setiap j sebagai nilai batas, dan mengekstrapolasi y_{N+1}^{j+1} dan y_{N+2}^{j+1} menggunakan dua nilai y sebelah kirinya, yaitu

$$y_{N+1}^{j+1} \approx 2y_N^{j+1} - y_{N-1}^{j+1}, \quad y_{N+2}^{j+1} \approx 3y_N^{j+1} - 2y_{N-1}^{j+1}$$

Secara numerik sistem persamaan tersebut dapat diselesaikan, salah satunya dengan menggunakan metoda Gauss-Seidel. Hasil perhitungan ini selanjutnya digunakan untuk menghitung nilai y pada tingkat waktu j berikutnya, dan begitu seterusnya. Pada saat menghitung y pada tingkat $j=1$, persamaan (3.7) memerlukan nilai $\{y_i^0, i = -2, -1, 0, \dots, N, N+1, N+2\}$. Hal ini diatasi dengan memberikan gelombang awal pada daerah pengamatan.

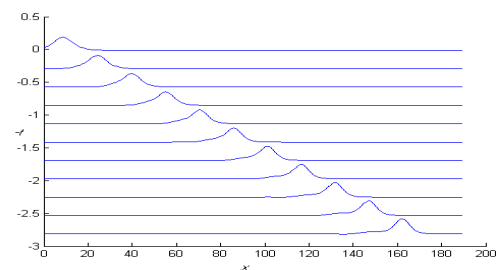
4. HASIL PERHITUNGAN

Prosedur numerik seperti dijelaskan di bagian atas digunakan untuk menghitung solusi Persamaan (6), yang merepresentasikan perambatan gelombang interface untuk beberapa macam nilai awal $\{y_i^0\}$. Perhitungan di sini dilakukan sebagian besar menggunakan $\Delta\xi = 0.15$ dan $\Delta\tau = 0.01$ dengan $N = 400$. Angka-angka tersebut memberikan kekonvergenan metoda Gauss-Seidel sampai iterasi tidak lebih dari 500, untuk menghitung $\{y_i^{j+1}\}$ dari $\{y_i^j\}$ menggunakan ketelitian 10^{-5} .

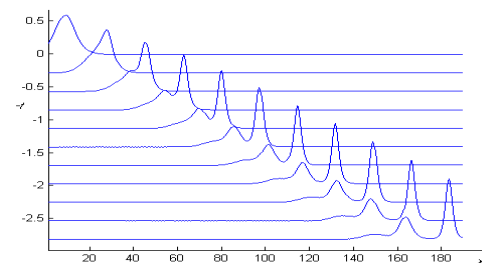
Sebagai pengujian, prosedur numerik di atas digunakan menghitung solusi dengan nilai awal berbentuk

$$y_i^0 = a \operatorname{sech}^2 \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2a\mu}{6\delta}} (i\Delta\xi - \xi_0) \right], \quad i = -2, -1, 0, \dots, N+2. \quad (4.1)$$

sesuai solusi analitik (2.7) dengan menggeser kekanan sebesar $\xi_0 = 7.9$ dan a bervariasi. Hasil perhitungan ditampilkan pada Gambar 2, menggunakan besaran-besaran fisis $h_1 = 1.3$, $h_2 = 1.0$, $\rho_1 = 0.6$, $\rho_2 = 1.0$.



(a)



(b)

Gambar 2. Dua macam perambatan gelombang internal, solusi dari (6) dengan nilai awal yang berbeda.

(a) $\eta(x, 0) = 0.2 y_i^0$

(b) $\eta(x, 0) = 0.6 y_i^0$

Kedua gambar diperoleh dengan menggunakan amplitudo yang berbeda. Gambar 2a menggunakan $\eta(x,0) = 0.2 y_i^0$ sedangkan Gambar 2b menggunakan $\eta(x,0) = 0.6 y_i^0$, dimana y_i^0 seperti diberikan (4.1) dengan $a = 1$, $a_m = 0.1$. Plot η untuk beberapa nilai t ditampilkan dengan menggesernya kebawah sebesar waktu evolusi yang diskala 31.6, agar perubahan yang terjadi dapat teramati.

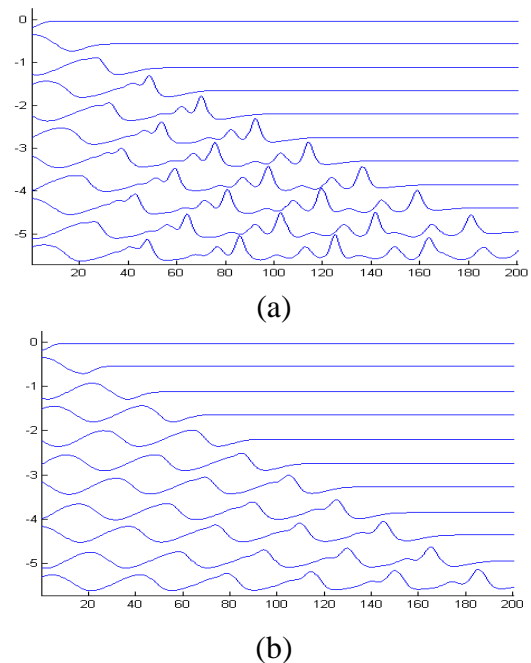
Dari tampilan Gambar 2, nilai awal $\eta(x,0) = 0.2 y_i^0$, yang merupakan simpangan (4.1) dikali 2 dan $a_m = 0.1$, memberikan perambatan gelombang dengan kecepatan konstan tanpa mengalami perubahan bentuk. Hal ini teramati berdasarkan posisi puncak gundukan pada setiap kurva, yang relative berada dalam satu garis. Begitu juga dengan bentuk dari tiap kurva, tinggi dan kegemukannya tampak sama. Sebaliknya, dengan menggunakan nilai awal kedua, simpangan (4.1) dikali 6 dan $a_m = 0.1$, gelombang akan pecah menjadi dua gundukan yang berbeda ketinggiannya. Gundukan rendah akan tertinggal oleh yang lebih tinggi. Hasil ini sesuai dengan karakteristik solusi persamaan KdV, lihat [2].

Prosedur perhitungan di atas selanjutnya digunakan untuk mengamati perambatan gelombang dengan memberikan nilai batas pada sisi sebelah kiri berbentuk sinusoida. Secara fisis masalah tersebut dapat dipandang sebagai pembangkitan gelombang dengan menekan dan menarik piston sehingga simpangan interface pada batas kiri bergerak naik-turun dengan bertambahnya waktu. Akibat dari nilai batas tersebut, gelombang merambat masuk pada daerah pengamatan. Selain itu, perhitungan dilakukan dengan mengubah besaran ketebalan fluida dan rapat massanya. Untuk mengurangi banyaknya parameter terkait, di sini digunakan ketebalan fluida bawah dan rapat massanya bernilai satu, sehingga besaran fisis pada fluida atas saja h_1 dan ρ_1 yang bervariasi.

Gambar 3a menampilkan perambatan gelombang sebagai hasil perhitungan persamaan KdV dengan nilai batas

$$\eta(0,t) = -0.2 \sin(0.85 t).$$

Besaran fisis yang digunakan di sini masih sama seperti pada perhitungan sebelumnya untuk gelombang soliter. Untuk ketebalan fluida atas yang lebih kecil, gelombang merambat dengan kurang mengalami perubahan bentuk. Hal ini ditampilkan pada Gambar 3b dengan nilai batas yang sama seperti Gambar 3a tetapi menggunakan ketebalan fluida atas $h_1 = 0.9$. Setelah selang waktu $t = 42$, profile gelombang pada interface dapat dilihat pada baris paling bawah di Gambar 3. Tampak berbeda gelombang yang terbentuk untuk dua nilai h_1 di atas. Pada fluida atas yang lebih tebal gelombang mengalami pembelahan lebih cepat dibandingkan h_1 yang lebih kecil.

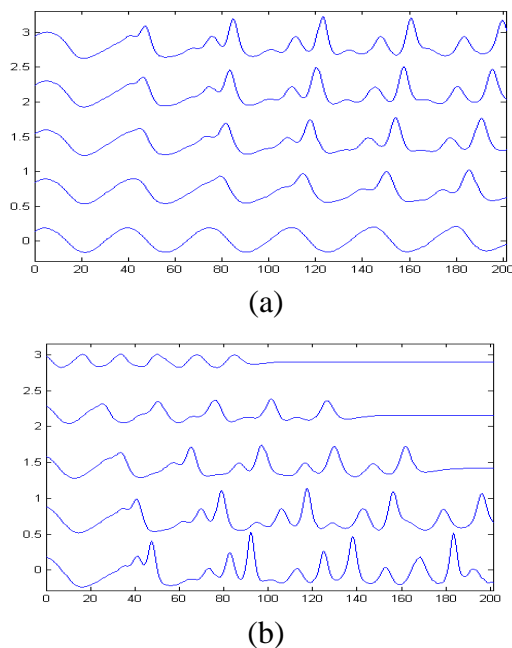


Gambar 3. Perambatan gelombang interface dengan nilai batas bertipe sinusoida. Hasil perhitungan menggunakan ketebalan fluida atas

(a) $h_1 = 1.3$, (b) $h_1 = 0.9$

Pada Gambar 4a pola interface ditampilkan sebagai hasil perhitungan untuk beberapa nilai h_1 yang berbeda dan

$\rho_1 = 0.6$ pada saat $t = 42$. Gambar ini menegaskan dugaan di atas berkaitan dengan pembelahan gundukan gelombang. Sedangkan pengaruh parameter rapat massa, pola gelombang yang terjadi ditampilkan pada Gambar 4b. Perhitungan dilakukan menggunakan $h_1 = 1.3$ dan ρ_1 yang bervariasi. Pada saat $t = 42$ nilai batas berbentuk sinusoida telah menjalar ke daerah pengamatan dengan pembelahan gundukan gelombang cepat terjadi pada nilai ρ_1 yang kecil begitu juga dengan kecepatan merambatnya. Pada ρ_1 terkecil yang digunakan, dalam selang waktu 42 gelombang sinusoida menjalar kurang dari setengah daerah pengamatan.



Gambar 4. Pola interface pada saat $t = 42$ untuk (a) $h_1 = 0.8, 0.9, 1.0, 1.1$ dan 1.2 (dari bawah ke atas) dengan $\rho_1 = 0.6$, (b) $h_1 = 1.3$ dengan $\rho_1 = 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9$ (dari bawah ke atas).

5. PENUTUP

Telah disampaikan penyelesaian numerik dari persamaan KdV, sebagai model dari perambatan gelombang interface pada sistem dua fluida dengan batas atas dan bawah kaku. Prosedur numerik yang dibangun berdasarkan metoda beda hingga

berhasil mengatasi kesulitan-kesulitan yang ada, dan digunakan mensimulasikan perambatan gelombang baik untuk gelombang soliter, sebagai pengujian atas metoda yang digunakan, maupun akibat adanya pembangkit gelombang. Hasil perhitungan juga digunakan untuk mengamati perambatan gelombang sebagai akibat perbedaan nilai parameter yang digunakan, ketebalan fluida dan rapat massanya.

Ucapan Terima Kasih

Penelitian ini terlaksana atas dukungan QUE (quality undergraduate education) project untuk Departemen Matematika, Institut Teknologi Bandung. Oleh karena itu penulis mengucapkan terimakasih, begitu juga kepada Dr. Pudjaprasetya yang telah banyak memberikan sumbangan pikiran dalam mendiskusikan masalah terkait.

6. DAFTAR PUSTAKA

- [1] W. Choi & R. Casmassa, (1996), *Weakly Nonlinear Internal Waves in A Two-fluid System*, J. Fluid Mech., **313**: 83 – 103.
- [2] P.G. Drazin & R.S. Jahnson, (1989), *Soliton: An Introduction*, Cambridge Univ. Press..
- [3] B -F. Feng & T. Mitsui, (1998), *A Finite Difference Method for The Korteweg-de Vries and The Kadomtsev-Petviashvili Equations*, J. Comp. Applied Maths., **90**: 95 – 116.
- [4] Grimshaw, E. Pelinovsky, O. Poloukhina, (2003), *Higher-order Korteweg-de Vries models for Internal Solitary Waves in A Stratified Shear Flow with A Free Surface*, disubmit ke Nonlinear Proc. In Geophy.
- [5] R. Grimshaw & S.R. Pudjaprasetya, (1998), *Hamiltonian Formulation for The Description of Interfacial Solitary Wave*, Nonlinear Proc. In Geophy., **5**: 3 – 12.
- [6] Jaharuddin & S.R. Pudjaprasetya, (2002), *Evolution Equations for Density Stratified Fluids*, Proc. ITB, **34**: 131–142.

- [7] T. Kakutani & N. Yamasaki, (1978), *Solitary Waves on A Two-Layer Fluid*, J. Physical Soc. Japan, **45** (2): 674–679.
 - [8] G.H. Keulegan, (1953), *Characteristics of Internal Solitary Waves*, J. Research of the National Bureau of Standards, **51** (3): 133–140.
 - [9] T. Kubota, D.R.S. Ko & L.D. Dobbs, (1978), *Weakly-Nonlinear, Long Internal Gravity Waves in Stratified Fluids of Finite Depth*, J. Hydro-nautics **12** (4): 157–165.
 - [10] R. Long, (1956), *Solitary waves in the one- and two-fluid systems*, Tellus, **8**: 460–471.
 - [11] H. Segur & J.L. Hammack, (1982), *Soliton models of long internal waves*, J. Fluid Mech. **118**: 285-304.
-